ПИТАЊА ЗА ИЗБОРНИ ПРЕДМЕТ - МАТЕМАТИКА

1. Доказати да је $\sqrt{2}$ ирационалан број.
2. Радећи дневно 8 часова 20 радника је зарадило 12000 динара за 15 дана. Колико часова дневно треба да раде 40 радника да би за 10 дана зарадили 10000 динара?
3. Раставити на просте факторе полином:
$5ax^2 - 10ax - bx + 2b - x + 2$
4. Израчунати: $\left(\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x+1} : \dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}\right) : \dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2+x}$
5. Ријешити систем једначина: $\begin{array}{l} a^2x - y = a - b \\ b^3x + ay = b^2 \end{array}$
6. Ријешити по x неједначину: $\dfrac{x}{3} - \dfrac{x-2}{2} > \dfrac{x+2}{2} - \dfrac{2x-6}{3}$
7. Ријешити графички систем линеарних неједначина:
$2x - y + 3 \geq 0 \wedge x + 2y + 2 \geq 0 \wedge 4x + 2y - 5 \leq 0$
8. Ријешити и дискутовати систем једначина: $\begin{array}{l} x + ky = 1 \\ kx - 3ky = 2k + 3 \end{array}$
9. Доказати теорему: средња линија троугла паралелна је основици и једнака њеној половини.
10. Збир унутрашњих углова у сваком троуглу једнак је опруженом углу. Доказати теорему.
11. Нека су M и N средишта страница AD и CD квадрата ABCD. Дужи BN и CMсе сјеку у P . Доказати да је AP=AB.
12. Централни угао је два пута већи од одговарајућег периферијског угла. Доказати теорему.
13. Тангентни угао је једнак одговарајућем периферијском углу. Доказати теорему.
14. Ако је четвороугао уписан у круг, онда су му наспрамни углови суплементни . Доказати теорему.
15. Збир двије наспрамне странице тангентног четвороугла једнак је збиру друге двије странице. Доказати.
16. Дата су два круга k и m, са центрима C и S, C≠S, који се сијеку. Кроз једну од заједничких тачака кругова поставити праву p, која на овим круговима одсјеца једнаке тетиве.
17. Конструисати троугао ABC коме је обим једнак датој дужини 2s, висина из тјемена C једнака датој дужи h_c и угао BAC једнак углу α.
18. Конструисати једнакостраничан троугао ABC, коме је дато тјеме A, а тјемена B и C припадају датим правима b и c.
19. У троуглу ABC дужи BD и CE су висине. Доказати да је $\angle ADE = \angle ABC$.
20. Ако је ABC правоугли троугао са правим углом ACB, тада је $BC^2 + AC^2 = AB^2$, односно $a^2 + b^2 = c^2$. Доказати.

21. Дате су дужи p и q. Конструисати дуж m, која је геометријска средина датих дужи.

22. Ако је тачка P ван круга k, у равни тог круга тада је потенција ове тачке у односу на круг k једнака квадрату одговарајуће тангентне дужи. Доказати теорему. (Златни пресјек дужи)

23. У дати полукруг уписати квадрат, тако да два тјемена квадрата припадају пречнику, а друга два кружном луку.

24. Израчунати: $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$

25. Упростити израз: $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

26. Израчунати израз: $\left((1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+1-x\right)-\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-1\right)$, $-1\leq x\leq 1$.

27. Упростити израз $\frac{(1+i)^3}{(2-3i)^2}\left(\frac{3-i}{2+i}-\frac{2-i}{3+i}\right)$

28. Израчунати $R_{(Z)}$ ако је: $R_{(x)}=(x-x^2+2x^3)(2-x+x^2)$ и $Z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

29. Дискутовати рјешења једначина, у зависности од вриједности реалних параметара (одредити природу рјешења). $ax^2-8x+3=0$.

30. У једначини $x^2+kx+k-1=0$ одредити реалан параметар k тако да рјешења задовољавају услов: $x_1^2+x_2^2=-x_1-x_2$.

31. Ријешити једначину: $x^4-(a^2-4)x^2-4a^2=0$ (биквадратна).

32. Ријешити једначину: $12x^5-23x^4-135x^3+135x^2+23x-12=0$ (кососиметрична).

33. Једначина $(5k-1)x^2-(5k+2)x+3k-2=0$ има тачно једно рјешење по x. Одредити x и k.

34. У каквој вези независној од m стоје рјешења x_1 и x_2 једначине: $(m-1)x^2+(2m-1)x+m-4=0$.

35. У каквој вези независној од m, стоје рјешења x_1 и x_2 једначине: $x^2-6x+5+m(x^2-5x+6)=0$.

36. Одредити реалан број m, тако да једно рјешење дате једначине $4x^2-15x+\frac{m^3}{2}=0$ буде квадрат другог рјешења.

37. Ријеши неједначину: $\frac{2x^2+x-13}{x^2-2x-3}>1$.

38. Ријешити неједначину: $\frac{x^2-|x|-12}{x-3}\geq 2x$.

39. Одредити p тако да за свако реално x буде $(p-2)x^2-2px+2p-3<0$.

40. Одредити реалан параметар m, тако да збир квадрата рјешења једначине $x^2-(2m-1)x-4m-3=0$ буде минималан.

41. Ријешити систем једначина: $x^2-3xy+y^2=-5\wedge x^2-xy+y^2=7$.

42. Ријешити једначину: $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2$.

43.Ријешити једначину: $3^{x+2}4\cdot 3^{x+1}+3^{x+1}+24=0$.

44.Ријешити неједначину: $8\cdot 3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}9^{\sqrt[4]{x}+1}\geq 9^{\sqrt{x}}$.

45.Ријешити једначину: $0{,}6^{x}\cdot\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{27}{125}\right)^{3}$.

46.Ријешити једначину: $x^{\log_x 2\left(x^2-1\right)}=5$.

47.Ријешити неједначину: $\log_{\frac{1}{3}}\log_4\left(x^2-5\right)>0$.

48.Ријешити једначину: $\log_{0,5x}x^2-14\log_{16x}x^3+40\log_{4x}\sqrt{x}=0$.

49.Доказати идентичност (аргументи су дати тако да су сви изрази дефинисани)

$$\frac{1-2\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}=tgx-ctgx?$$

50.Израчунати: $tgx+ctgx$, **ако је** $tg^2x+ctg^2x=2$.

51.Доказати да је: $\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\cos 8x=\frac{\sin 16x}{16\sin x}$.

52.Ако је $tg\alpha=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ **и** $tg\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$, **при чему је** $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ **и** $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, **доказати да је** $\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$.

53. Ако је $\alpha+\beta+\chi=\pi$, доказати да је $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\chi=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\chi}{2}$.

54. Доказати да је: $\frac{1}{\sin 10^\circ}-4\sin 70^\circ=2$.

55. Упростити израз: $\frac{\sin(-\alpha)}{\sin(180^\circ+\alpha)}-\frac{tg(90^\circ+\alpha)}{ctg\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin(90^\circ+\alpha)}$.

56. Ријешити једначину: $4\sin^2 x\cos x-4\sin^3 x+\sin x-\cos x=0$.

57. Ријешити неједначину: $4\cos^2 x-3>0$.

58. Ријеши систем једначина: $\sin^2 x+\sin^2 y=\frac{3}{4}$

$x+y=\frac{5\pi}{12}$.

59. Израчунати: $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2(-1-i)}\right)^{12}$.

60. Израчунати: $\cos\left(2\arcsin\frac{4}{5}\right)$.

61. Ријешити неједначину: $2\sin^2 x-3\sin x+1<0$.

62. Површине страна квадра стоје у размјери 3:1:4. Израчунати површину квадра ако му је дијагонала дужине 39cm.

63. Израчунати запремину праве тростране призме, ако је B=10cm^2, а бочне стране су: 25cm^2, 29cm^2 и 36cm^2.

64. Висина зарубљене пирамиде је H=15цм. Ако је $B_1 : B_2 = 9:4$ и запремина V=457cm^3, израчунати B_1 и B_2.

65. Дијагонала квадра има дужину 13cm, а дијагонале бочних страна $4\sqrt{10}$ cm и $3\sqrt{17}$ cm. Израчунати запремину квадра.

66. Правоугли троугао са катетама 7см и 24cm ротира око сваке катете. Одредити размјере површина и запремина добијених обртних тијела.

67. Једнакостранични троугао ABC странице AB=a ротира око праве h, која садржи тачку A и нормална је на AB. Израчунати површину и запремину добијеног обртног тијела.

68. Ријешити и дискутовати систем једначина:

$$mx + 4y + z = 0$$
$$2x - nz = -2$$
$$3y + 3z = 1.$$

69. Ријешити једначину: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = 0$.

70. Дата су тјемена паралелограма ABCD:A(1,-2,0), B(2,1,3), C(-2,0,5). Одредити координате тјемена D и поврчину паралелограма.

71. Израчунати површину троугла одређеног векторима $2\vec{a} - 3\vec{b}$ и $3\vec{a} + 2\vec{b}$, ако је $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{a}+\vec{b}| = 4$.

72. Наћи једначину праве p, која садржи пресјечну тачку правих a: x+2y-5=0 и b: 2x+3y-7=0 и нормална је на праву q: 2x-2y+5=0.

73. Одредити координате ортоцентара троугла ABC, ако су једначиненјегових страница AB, BC, CA, редом:
x-y-2=0, 2x+y-13=0, 4x-y-5=0.

74. Наћи једначину тангенте круга описаног око троугла ABC, конструисане у тачки A, ако је: A(-1,8), B(-3,4), C(6,7).

75. Написати једначину тангенте круга $x^2+y^2=5$, која сијече праву $x+2y-7=0$ под углом од 45^o.

76. Задана је елипса $8x^2+18y^2=144$ и права p: $2x+3y+15=0$. Одредити на елипси тачку најближу датој правој и тачку најудаљенију од дате праве.

77. Дате су хипербола $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ и парабола $y^2=16x$. Одредити:

а) пресјечне тачке кривих и

б) угао под којим се сијеку криве.

78. Написати једначину хиперболе којој је дата асимптота $x-2y=0$ и тангента $5x-6y-8=0$.

79. Одредити прост број p, тако да и број 3^p+p^3 буде прост број.

80. Колики је остатак дијељења $(4^{444}-3^{333}):13$?

81. Доказати да за сваки природан број n важи једнакост

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

82. Доказати Муаврову формулу, тј. доказати да је $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos\varphi+i\sin\varphi$, $n\in N$.

83. Доказати да је $9^{n+1}+2^{6n+1}$ дјељиво са 11 за сваки природан број n.

84. Између -2 и 46 уметнути 15 бројева, тако да сви заједно формирају аитметички низ. Колики је збир ових 17 бројева?

85. За које вриједности x бројеви log2, $\log(2^x-1)$ и $\log(2^x+3)$ представљају у датом поретку три узастопна члана аритметичког низа?

86. Колико чланова има геометријски низ, ако је збир првог и петог члана 51, збир другог и шестог 102, а збир свих чланова 3069?

87. Први члан аритметичког низа је 24. Написати првих десет чланова овог низа, ако први, пети и једанаести члан одерђују геометријску прогресију.

88. Колика се пермутација може начинити од ријечи М А Т Е М А Т И К А?

89. Узимајући ријеч МЕТАР за почетни положај, пермутовањем добијамо ријеч ТРЕМА. Која је то пермутација по реду?

90. Од 10 срећака 3 сигурно доносе добитак, Катарина је купила 6 срећака. Колико постоји различитих могућности за куповину ових срећака, у којима Катарина има бар један добитак?

91. У развоју $(\frac{1}{x}+3x)^n$ наћи члан који не садржи x, знајући да је коефицијент десетог члана највећи.

92. Изразити sin6x и cos6x преко sinx и cosx.

93. Израчунати следеће граничне вриједности: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-3x}-2}{1+\sqrt[3]{2x-1}}$.

94. Израчунати граничне вриједности: $\lim_{x\to\infty}(\frac{2x-1}{2x+3})^{3x-2}$.

95. Израчунати граничне вриједности: $\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x\sin^2 x}$.

96. Доказати формулу: $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

97. Доказати формулу: $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$.

98. Израчунати лијеви и десни лимес функције у прекидној тачки $f(x)=\frac{x^2-x}{x+2}$.

99. Наћи асимптоте функције $y=\frac{x^2-x}{x+2}$.

100. Израчунати следеће граничне врijдности: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

101. Наћи слиједеће изводе: y''=? Ако је $y=\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$.

102. Написати једначину тангенте и нормале криве $y=\arcsin\frac{x-1}{2}$ у тачки у којој је тангента нормална на праву 2x+y+5=0.

103. Испитати монотоност функције $y=\frac{x}{x^2-1}$.

104. Око полулопте полупречника р cm описати купу минималне запремине, тако да база купе лежи у равни великог круга полулопте.

105. Коришћењем Лопиталовог правила израчунати граничне вриједности $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^2},e^{-\sqrt[3]{x}}\right)$.

106. Коришћењем Лопиталовог правила израчунати граничне вриједности $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

107. Испитати екстрем функције $y=\frac{x}{x^2-4}$.

108. Испитати знак функције $y=x^2\ln x$.

109. Израчунати $\int 2^{2x}e^x dx$.

110. Израчунати $\int\frac{dx}{\sin 2x}$.

111. Израчунати $\int \frac{\ln x dx}{x}$.

112. Методом парцијалне интеграције израчунати: $\int x^2 e^x dx$.

113. Методом парцијалне интеграције израчунати: $\int x \ln^2 x dx$.

114. Израчунати: $\int_{01}^{1} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$.

115. Израчунати: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos^2 x dx$.

116. Израчунати површину, ограничену датим линијама $y=4x - x^2$, $y=0$.

117. Израчунати површину, ограничену датим линијама $y=x^2$, $y=8, x \geq 1$.

118. Израчунати површину, ограничену датим линијама $y=x^2$, $x=y^2$.

119. Израчунати површину, ограничену датим линијама $x^2+y^2=p^2$.

120. Израчунати запремину тијела одређеног ротацијом датог лука око осе 0х. $y=x^2 - 2x$, $y \leq 0$.

Актив професора математике